

## Λύση Ασκήσης 2

(1)

Για να είναι παραγωγίσιμη η  $f$  στο  $(0,0)$  πρέπει να υπάρχουν οι τμήσει παραίγωγοι  $f_x(0,0)$ ,  $f_y(0,0)$  και επι πλέον το αίτιο

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f_x(x-0) - f_y(y-0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \quad (1)$$

Υπολογισμός:  $f_x(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0-0}{x} = 0$

παρόμοια βεβαιώνω  $f_y(0,0) = 0$ .

Συνεπώς πρέπει να ελέγξω την (1), η οποία γράφεται:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \quad \eta$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x|y|^\alpha}{(x^2+y^4)\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \quad (2)$$

Εκω:

$$0 \leq \frac{|x||y|^\alpha}{(x^2+y^4)\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{|x|y^2 \cdot |y|^{\alpha-2}}{(x^2+y^4)\sqrt{x^2+y^2}} \leq$$

$$\leq \frac{\frac{1}{2}(x^2+y^4) |y|^{\alpha-2}}{(x^2+y^4)\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{2} \frac{|y|^{\alpha-2}}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{|y| |y|^{\alpha-3}}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{1}{2} \frac{\sqrt{x^2+y^2} \cdot |y|^{\alpha-3}}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad (2)$$

$$= \frac{1}{2} |y|^{\alpha-3} \quad \text{And.}$$

$$0 \leq \frac{|x| |y|^{\alpha}}{(x^2+y^4)\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{1}{2} |y|^{\alpha-3}.$$

Αν  $\alpha > 3$ , από κείμενο παραπάνω, συμπεραίνει ότι ισχύει η (2) και συνεπώς η  $f$  είναι παραγωγισή στο  $(0,0)$ .

Στη συνέχεια θα δείξω ότι για  $\alpha \leq 3$  η (2) δεν ισχύει. Συνεπώς η  $f$  δεν είναι παραγωγισή στο  $(0,0)$ .  
Οπότε  $\boxed{\alpha_0 = 3}$ .

Έστω  $x = ky^2$  με  $k > 0$ .

$$\begin{aligned} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} &= \frac{f(ky^2,y)}{\sqrt{k^2y^4+y^2}} = \frac{k|y|^{2+\alpha}}{y^4(k^2+1) \cdot |y| \sqrt{k^2y^2+1}} \\ &= \frac{k|y|^{\alpha-3}}{(k^2+1)\sqrt{k^2y^2+1}} \end{aligned}$$

Οπότε:

$$\underline{\text{Αν } \alpha < 3} : \lim_{y \rightarrow 0} \frac{k|y|^{\alpha-3}}{(k^2+1)\sqrt{k^2y^2+1}} = +\infty$$

Δεχ. η  $f$  οχι παραγωγιστη εν  $(0,0)$ .

$$\underline{\text{Αν } \alpha = 3} : \lim_{y \rightarrow 0} \frac{k}{(k^2+1)\sqrt{k^2y^2+1}} = \frac{k}{(k^2+1)} \neq 0$$

(και εξαρταται απο  $k$ ), δεχ. το

οτιο (2) δεν λαμβανει;  $f$  οχι παραγωγιστη.

Παραμενου: Επειδη ε παραδοξασμα ειναι

$f$  δεν ειναι ομαλη, (εναν  $x^2+y^4$

και οχι  $x^2+y^2$ ) η χειροτερη περιπτωση

δεν ερδεικνυται.